Estimación de la Evasión del IVA

Mediante el Método de Punto Fijo

Eduardo Engel, Alexander Galetovic y Claudio Raddatz

22 de Abril de 1998

Resumen Ejecutivo

I. Metodología

1. El impuesto que más recauda en Chile es el impuesto al valor agregado (IVA), con un 42% de la recaudación total de 1996. Por eso es importante contar con buenas estimaciones de la tasa de evasión de este impuesto, con objeto de evaluar y orientar las políticas de fiscalización.

2. Las estimaciones disponibles de la tasa de evasión de IVA en Chile se basan en comparar el pago efectivo con el potencial teórico, calculando este último a partir de la información de Cuentas Nacionales. Esta metodología adolece de varias limitaciones, entre las cuales destacan el hecho que las Cuentas Nacionales no están exentas de evasión y que el método no permite obtener una medida de la precisión de las estimaciones obtenidas.

3. Este trabajo utiliza una aproximación alternativa a la estimación de la tasa agregada de evasión de IVA, centrándose en la evasión que tiene lugar al momento de la compraventa de bienes y servicios (subdeclaración de ventas).

4. El método en cuestión, conocido como "método de punto fijo", consiste en seleccionar una muestra de lugares de venta en los cuales se hace presente un inspector del SII durante un período relativamente largo (v.g., un día). La estimación de la tasa de evasión de un vendedor particular se obtiene comparando el monto cancelado el día de la inspección de punto fijo (en que el inpsector se aseguró de que no hubiera evasión) con aquellos cancelados en días anteriores.

5. Este trabajo presenta una metodología desarrollada por los autores para estimar la tasa de evasión de IVA por subdeclaración de ventas y la aplica al caso de Chile. Es difícil estimar la tasa agregada de evasión de IVA por subdeclaración de ventas (en lo sucesivo: 'evasión de IVA') porque el método de punto fijo entrega estimaciones sumamente imprecisas a nivel de firma (o lugar de venta). La metodología empleada construye estimaciones cuya precisión mejora al pasar de firmas individuales a un conjunto de firmas "similares" y, posteriormente, al pasar de firmas similares al universo de todas las firmas que debieran entregar boletas o facturas.

Resultados

1. La estimación agregada de evasión de IVA por concepto de ventas sin boleta se estima en 24,4% de las ventas reales (todas las transacciones, incluyendo aquellas que no se dio boleta), con una desviación estándar del 3,9%.

2. La tasa anterior significa una pérdida de recaudación de 860 millones de dólares.

3. Los resultados anteriores son robustos ante cambios en los supuestos principales en que se basa la metodología de estimación.

4. El sector con mayor tasa de evasión de IVA es el Comercio Mayorista, con una tasa de evasión estimada de un 73% con una desviación estándar de 12%.

5. El sector que ocupa el segundo lugar en tasas de evasión son los Servicios Financieros y Diversos, con una tasa de evasión estimada en 27% con una desviación estándar de 5%.

6. El tercer sector de actividad económica con tasas de evasión importantes es Restaurantes y Hoteles, con una tasa de evasión estimada de 13% con una desviación estándar de 3%.

1 Introducción

El impuesto que más recauda en Chile (42% de la recaudación total por impuestos en 1996) es el impuesto al valor agregado (IVA). Por eso es importante contar con buenas estimaciones de la tasa de evasión de este impuesto, con objeto de evaluar y orientar las políticas de fiscalización.

Las estimaciones de la tasa de evasión de IVA en Chile (Serra [1991]) se basan en comparar el pago efectivo con el potencial teórico, calculando este último a partir de la información de Cuentas Nacionales. Esta metodología adolece de varias limitaciones, entre las cuales mencionamos dos[1]. Primero, la información con que se construye las Cuentas Nacionales no está exenta de evasión, entre otros motivos porque utiliza información tributaria. Segundo, esta metodología no permite obtener una medida de la precisión de las estimaciones obtenidas. Por ejemplo, por este método se obtiene que la evasión de IVA ha caído en la última década de 24,3% en 1987 a 17,7% en 1995. La metodología de Cuentas Nacionales no permite determinar si esta caída es estadísticamente significativa o si se trata de oscilaciones en torno a un valor verdadero que en realidad no ha cambiado[2].

El objetivo de este trabajo es utilizar una aproximación alternativa a la estimación de la tasa agregada de evasión de IVA, centrándose en la evasión que tiene lugar al momento de la compraventa de bienes y servicios (subdeclaración de ventas). El método en cuestión, conocido como "método de punto fijo", consiste en seleccionar una muestra de lugares de venta en los cuales se hace presente un inspector del SII durante un período relativamente largo (v.g., un día). La idea es que la presencia del inspector altere el comportamiento del vendedor, quien no evadirá IVA el día de la inspección, sin alterar el comportamiento de los compradores. La estimación de la tasa de evasión de un vendedor particular se obtiene comparando el monto cancelado el día de la inspección de punto fijo con aquellos cancelados en días anteriores.

El método de punto fijo pertenece a los métodos de estimación de evasión basados en auditorías[3]. Sin embargo, a diferencia de otras auditorías realizadas con el objeto de detectar evasión, es prácticamente imposible que

[1]Para más detalles sobre las limitaciones de este método véase Jorrat (1997).

[2]Una pregunta similar se puede hacer respecto del leve aumento en la tasa de evasión de 17,7 a 18,4% entre 1993 y 1995.

[3]Para un survey sobre métodos para estimar tasas de evasión, véase el capítulo Cowell (1990). Para el caso de Chile, véase Jorrat (1997).

el vendedor tome acciones que boicoteen la obtención de la información que busca el inspector durante una inspección de este tipo; el vendedor difícilmente puede realizar acciones que afecten el resultado de la auditoría. En efecto, no es necesario que el inspector sea exitoso al analizar información sofisticada que le entregará el vendedor, sino que basta que su presencia asegure que el vendedor pague IVA por toda la mercadería que vende el día de la inspección de punto fijo, para que ésta sea exitosa.

Este trabajo presenta una metodología desarrollada por los autores para estimar la tasa de evasión de IVA por subdeclaración de ventas y la aplica al caso de Chile. El trabajo de campo correspondiente fue coordinado por Michel Jorrat, Gerente de Estudios del SII, quien además propuso emplear el método de punto fijo para obtener estimaciones de evasión agregada[4].

La dificultad del problema de estimación de la tasa agregada de evasión de IVA por subdeclaración de ventas (en lo sucesivo: 'evasión de IVA') radica en que el método de punto fijo entrega estimaciones sumamente imprecisas a nivel de firma (o lugar de venta). La gran variabilidad que existe en los niveles de venta diarios de las firmas lleva a que la venta del día de inspección de punto fijo varíe considerablemente dependiendo del día elegido[5]. La metodología empleada consiste en ir construyendo estimaciones cuya precisión mejora al pasar de firmas individuales a un conjunto de firmas "similares" y, posteriormente, al pasar de firmas similares al universo de todas las firmas que debieran entregar boletas o facturas[6].

El siguiente ejemplo ilustra la idea anterior. Consideramos una firma cuyas ventas diarias toman valores entre 1 y 5 MM de pesos, todos ellos igualmente probables, y cuya tasa se evasión del IVA es de 20%. Si se cuenta con suficiente información de días de venta previos al de punto fijo, se estimará que los niveles de venta de la firma son alrededor de 2.4 MM

[4]En varios países los inspecciones de punto fijo son rutinarias para detectar evasión de un vendedor particular. No tenemos conocimiento de que se haya usado antes este método para obtener estimaciones agregadas de evasión.

[5]El trabajo de campo se realizó con observaciones de punto fijo de un día, la cual es altamente variable. En principio podría repetirse la fiscalización de punto fijo en días sucesivos, sin embargo, según estiman los especialistas del SII esto no sería fácil de llevar a cabo en la práctica sin tener serios reclamos de los fiscalizadores. Además las firmas evasoras podrían alterar el comportamiento de los compradores.

[6]Al realizar las estimaciones a nivel de firmas, se obtuvo que en sólo 21 de 265 firmas el parámetro estimado para la fracción de las ventas evadidas fue significativamente mayor que 1 mientras en 20 fue significativamente menor que 1. Al agregar estos resultados por tipos de firmas similares se obtuvo que para 20 de 41 grupos el parámetro resultó significativamente mayor que 1 y sólo en dos casos fue significativamente menor que 1.

de pesos (el promedio de 3 MM de pesos menos el 20% de evasión). El día de punto fijo las ventas tomarán algún valor entre 1 y 5 MM de pesos. Con una probabilidad que no es baja (35%) las ventas serán *mayores* que en un día típico, concluyéndose que no hay evasión.

Podría creerse que el ejemplo anterior es exagerado, que la volatilidad de las venta no es tan grande. Por el contrario, los números elegidos son conservadores. El coeficiente de variación de la distribución de ventas, que como se verá es la medida correcta de variabilidad en este caso, es igual a 0,38 en el ejemplo anterior, valor que es *inferior* al promedio de la muestra de firmas consideradas (0,45). Es por ello que podemos afirmar que, en general, no será fácil determinar si una diferencia entre las ventas del día de punto fijo y días anteriores se debe a la gran variabilidad en las ventas o a que el día de punto fijo la firma no pudo evadir IVA.

Este informe está organizado como sigue. A esta introducción le sigue la sección 2 donde se describe la metodología de estimación. La sección 3 presenta los resultados de esta estimación. La sección 4 presenta algunas consideraciones finales. Le siguen una serie de apéndices técnicos.

2 Metodología de estimación

En esta sección se presenta la metodología de estimación. En la sección 2.1 se propone un estimador del monto evadido por una firma particular. Las secciones 2.2 y 2.3 estudian estimadores para los montos evadidos por todo un sector ('casillero') y por el universo de firmas que entregan boletas o facturas, respectivamente.

2.1 Evasión de una firma

Se supone que la información disponible para cada firma son los pagos por IVA en $n+1$ ocasiones, una de las cuales corresponde a un día en que el SII realizó la inspección de punto fijo y las n restantes a días anteriores a aquel de punto fijo. El monto del día de punto fijo se denota mediante y y los montos de los días restantes mediante $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Se supone que los x_i son realizaciones de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas (i.i.d.) con función de distribución común

$F(x)$, cuya media y varianza son μ y σ^2, respectivamente[7]. Respecto de la observación hecha el día de punto fijo se supone que es una realización de una variable aleatoria independiente de aquellas que dan origen a los x_i e igual a β veces dicha variable aleatoria, es decir, con función de distribución $F(y/\beta)$, por lo cual su media es $\beta\mu$ y su varianza $\beta^2\sigma^2$. Obviamente tendremos que $\beta \geq 1$, correspondiendo el caso $\beta = 1$ a cuando no hay evasión.

Cabe notar que la distribución común $F(x)$ no puede ser normal, pues sabemos que sólo toma valores mayores o iguales que cero. En las simulaciones que siguen se supondrá que $F(x)$ es log-normal, es decir, que las variables aleatorias que dan origen a los x_i e y son exponenciales de variables aleatorias normales.

Además suponemos que conocemos el monto V que la firma pagó en IVA durante el período considerado (v.g., el año en que se realizó la inspección de punto fijo).

El parámetro de interés es β: βV estima el monto que la empresa debió cancelar por IVA, $(\beta-1)V$ el monto que evadió y $(\beta-1)/\beta$ la tasa de evasión correspondiente. En cambio los parámetros que caracterizan la función de distribución $F(x)$ (v.g., μ y σ^2) no tienen interés per se y sólo complican la estimación de β. Por ello en inglés se les denomina "nuisance parameters".

Un candidato natural para estimar β es

$$\widehat{\beta}_0 = y/\overline{x},$$

donde $\overline{x}$ denota el promedio de los x_i. Sin embargo, este estimador tiene un sesgo sistemático, debido a que el valor esperado del cuociente de dos variables independientes no es igual al cuociente de los valores esperados correspondientes. Este sesgo depende de manera importante del coeficiente de variación de $F(x)$, definido como[8]:

$$\mathrm{CV} \equiv \frac{\mu}{\sigma}. \tag{1}$$

Que el sesgo anterior es importante se infiere de la segunda columna del Cuadro 1, que muestra cómo varía el sesgo promedio de $\widehat{\beta}_0$, normalizado por

[7]Con objeto de que se cumpla este supuesto será necesario expresar los montos en moneda de una misma fecha. Sobre este punto volvemos en la sección 3.

[8]El coeficiente de variación es una medida de dispersión, relativa a la media, que es aproximadamente igual a la desviación standard del logaritmo de la variable aleatoria con función de distribución $F(x)$.

Tabla 1: Sesgo, relativo a β (porcentaje), de ambos estimadores

Coef. de variación	Sesgo % $\widehat{\beta}_0$	Sesgo % $\widehat{\beta}_2$
0,00	0,00	0,00
0,10	0,11	0,00
0,20	0,51	0,02
0,30	1,18	0,11
0,40	2,13	0,28
0,50	3,35	0,56
0,60	4,82	0,95
0,70	6,53	1,49
0,80	8,46	2,19
0,90	10,58	3,04
1,00	12,88	4,05
1,10	15,32	5,21
1,20	17,90	6,51

β, con el coeficiente de variación de $F(x)$[9]. Para un coeficiente de variación de 0,5 el sesgo promedio es de 3,35%; para un coeficiente de variación de 1,0 sube al 12,88%. En general, el tamaño del sesgo crece con el coeficiente de variación[10].

Con objeto de encontrar un estimador insesgado, es necesario corregir $\widehat{\beta}_0$ con un factor que dependerá de momentos más altos de la distribución $F(x)$. Con tal objeto recordamos que el coeficiente de asimetría ('skewness') y la kurtosis de la distribución $F(x)$ se definen como:

$$\gamma = \int (x-\mu)^3 dF(x)/\sigma^3, \tag{2}$$

$$\kappa = \int (x-\mu)^4 dF(x)/\sigma^4. \tag{3}$$

La siguiente proposición muestra el factor de corrección que debiéramos usar si conociéramos CV, γ y κ.

[9]Se utilizaron 50.000 simulaciones. Se fijó $n = 7$ y $F(x)$ es log-normal. Es fácil mostrar formalmente que el sesgo relativo no depende de la media de $F(x)$ o del valor de β elegido.

[10]El valor promedio de los coeficientes de variación de las firmas consideradas es de $0,4487$ con una desviación standard de $0,3065$; por este motivo el rango considerado para los coeficiente de variación va de 0 a 1,2.

Proposition 2.1 *El estimador $\widehat{\beta}_1 \equiv \widehat{\beta}_0/A$ es un estimador (aproximadamente) insesgado de β para*[11]*:*

$$A = 1 + \frac{\mathrm{CV}^2}{n} - \frac{\gamma \mathrm{CV}^3}{n^2} + \frac{(3n + \kappa - 3)\mathrm{CV}^4}{n^3}. \tag{4}$$

Demostración Ver Apéndice A. ∎

El estimador $\widehat{\beta}_1$ de la proposición anterior no se puede utilizar en la práctica porque no conocemos los momentos de $F(x)$. En este caso, es natural utilizar aquel estimador que resulta de reemplazar los momentos en A por sus estimadores habituales:

$$\widehat{\beta}_2 \equiv \frac{y}{\overline{x}\widehat{A}}, \tag{5}$$

donde $\widehat{A}$ se obtiene sustituyendo CV, γ y κ en A mediante:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{CV}} &= \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\mu}}, \\ \widehat{\gamma} &= \frac{1}{n\widehat{\sigma}^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\mu})^3, \\ \widehat{\kappa} &= \frac{1}{n\widehat{\sigma}^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\mu})^4, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \\ \widehat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\mu})^2. \end{aligned}$$

El estimador $\widehat{\beta}_2$ ya no necesariamente será insesgado, sólo es posible afirmar que a medida que n crece el sesgo correspondiente tiende a cero. Sin embargo, como los valores de n con que trabajamos son bastante pequeños, se requiere estudiar las propiedades de $\widehat{\beta}_2$ en muestras pequeñas. La tercera columna de la Tabla 1 muestra cómo varía el sesgo promedio de $\widehat{\beta}_2$, normalizado por β, con el coeficiente de variación de $F(x)$[12]. Para un coeficiente

[11] El sesgo es del orden de CV^5/n^3.

[12] El pie de página 10 también es atingente acá.

de variación de 0,5 el sesgo promedio es de 0,56%; para un coeficiente de variación de 1,0 sube al 4,05%. El sesgo asociado al estimador $\widehat{\beta}_2$ es mucho menor que aquel de $\widehat{\beta}_0$: para coeficientes de variación menores que 0,5 es más de un 83% menor, para coeficientes de variación menores que 1 es al menos un 68% menor. La Tabla 1 muestra que el sesgo de $\widehat{\beta}_2$ es pequeño, aún para coeficientes de variación bastante grandes.

La desviación standard de $\widehat{\beta}_2$ es relativamente grande, por lo cual frecuentemente $\widehat{\beta}_2$ tomará valores menores que uno, lo cual no tiene una interpretación razonable. Si se impone que el valor estimado de β sea mayor o igual que uno, por ejemplo tomando $\max(1, \widehat{\beta}_2)$ en lugar de $\widehat{\beta}_2$, se obtiene un estimador con menor error cuadrático medio, pero que ya no será insesgado. Si el objetivo es estimar el nivel de evasión de IVA de una firma particular, hacer esta corrección es apropiado; sin embargo, como nuestro objetivo es obtener una estimación de la tasa de evasión agregada, es conveniente trabajar con estimadores insesgados, por lo cual no hacemos esta corrección.

También cabe notar que, para una firma dada, el estimador $\widehat{\beta}_2$ no es consistente, es decir, cuando el número de observaciones crece el estimador no necesariamente tiende al valor correcto. Esto se debe a que el aumento del número de observaciones *no* va aparejado de un aumento en el número de observaciones de punto fijo, la que sigue siendo única. La situación cambia si se realizan inspecciones de punto fijo durante varios días consecutivos en cada lugar de venta seleccionado, sin embargo, tal como se comentó en la introducción, en la práctica esta alternativa parece ser inviable.

La siguiente proposición entrega una expresión aproximada para la desviación standard de $\widehat{\beta}_2$, mostrando que ésta es (aproximadamente) igual al producto del coeficiente de variación de $F(x)$ y un factor que decrece a medida que el número de observaciones crece.

Proposition 2.2 *La desviación standard de $\widehat{\beta}_2$ es aproximadamente igual a:*

$$\sigma(\widehat{\beta}_2) \quad \simeq \quad \widehat{\beta}_2 \widehat{\mathrm{CV}} \sqrt{1 + \frac{1 + \mathrm{CV}^2}{nA^2}},$$

con A definido en (4).

DEMOSTRACIÓN Ver Apéndice B. ∎

En el caso de 80 de las 347 firmas a las cuales se les realizó inspecciones de punto fijo, hubo observaciones de los montos cancelados por IVA en días anteriores al punto fijo que fueron idénticamente nulas, sin que ese día el lugar de venta hubiese estado cerrado. (v.g., por tratarse de un día feriado). Luego se trata de un día en que efectivamente no se entregó boleta alguna, ya sea porque no hubo ventas o porque el vendedor evadió el IVA en cada una de las ventas que realizó. Con el objeto de descartar la posibilidad de que las observaciones nulas correspondan a días donde efectivamente no hubo ventas, no se consideraron en las estimaciones aquellas firmas que en el día del punto fijo emitieron menos de 7 boletas. La idea es que si una firma entregó un número suficientemente alto de boletas el día del punto fijo (en nuestro caso 7 boletas), la probabilidad de que no haya tenido ventas en alguno de los días anteriores es muy baja. Por lo tanto, en estos casos supondremos que las observaciones nulas significan que la firma evadió el IVA de todas sus ventas. A continuación extendemos la metodología desarrollada anteriormente para incorporar la posibilidad de observaciones nulas.

Suponemos que los x_i son i.i.d. con una distribución que con probabilidad p es $F(x)$ y con probabilidad $(1-p)$ es idénticamente nula (la firma decide evadir en un 100%). Si V denota el monto cancelado por IVA, entonces $\beta V/p$ estima el monto de IVA que la firma debió cancelar, $(\frac{\beta}{p}-1)V$ el monto que evadió y $(\beta-p)/\beta$ la tasa de evasión correspondiente.

La siguiente proposición extiende los resultados de las Proposiciones 1 y 2 a este caso más general:

Proposition 2.3 *Se dispone de n observaciones en días anteriores al de punto fijo, n_1 de las cuales son distintas de cero. Sea $\widehat{p} = n_1/n$. Se define A como en (4), pero con n_1 en lugar de n y donde* CV*, γ y κ se calculan sólo en base a las observaciones no nulas. También se define:*

$$D = 1 + \frac{\mathrm{CV}_p^2}{n} - \frac{\gamma_p {\mathrm{CV}_\mathrm{p}}^3}{n^2} + \frac{(3n+\kappa_p-3)\mathrm{CV}_p^4}{n^3}, \tag{6}$$

donde CV_p, γ_p y κ_p denotan el coeficiente de variación, de asimetría y de kurtosis de una variable Bernoulli con probabilidad de éxito p:

$$\mathrm{CV}_p = \sqrt{\frac{1-p}{p}},$$

$$\begin{aligned}\gamma_p &= \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}},\\ \kappa_p &= \frac{1-3p+3p^2}{p(1-p)}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\widehat{\beta}_3 \equiv \frac{y}{AD\widehat{px}}$$

es un estimador (aproximadamente) insesgado de β/p, cuya varianza es (aproximadamente) igual a:

$$\sigma^2(\widehat{\beta}_3) \simeq \widehat{\beta_3}^2 \left\{ \mathrm{CV}^2 \left[1 + (1+\mathrm{CV}^2) \left(\frac{\mathrm{CV}_p^2}{n \cdot n_1 \cdot A^2 \cdot D^2} + \frac{1}{n_1 A^2} \right) \right] + \frac{\mathrm{CV}_p^2 (1+\mathrm{CV}^2)}{nD^2} \right\}.$$

Finalmente cabe notar que para calcular $\widehat{\beta}_3$ en la práctica se reemplazan los momentos teóricos por sus valores estimados; en el caso de los momentos asociados a p esto se hace sustituyendo p por $\widehat{p}$ en las expresiones correspondientes.

Demostración Ver Apéndice C. ∎

Ahora estamos en condiciones de proponer un estimador que será aproximadamente insesgado para el monto de IVA evadido por la firma. Si denotamos mediante V el monto cancelado por IVA por la firma en el año en cuestión entonces tendremos que un estimador asintóticamente insesgado del monto que debió haber cancelado, C, viene dado por

$$\widehat{C} = \widehat{\beta}_3 V, \tag{7}$$

por lo cual el monto evadido, E, se puede estimar mediante

$$\widehat{E} = (\widehat{\beta}_3 - 1)V. \tag{8}$$

Finalmente, la tasa de evasión se puede definir de dos maneras. La más natural es considerar la evasión como fracción del monto que se hubiese cancelado si no hubiera habido evasión ("recaudación teórica"), $e \equiv E/C$. Este tasa se puede estimar mediante[13]:

$$\widehat{e} = \frac{\widehat{\beta}_3 - 1}{\widehat{\beta}_3}.$$

[13] El estimador que sigue no será insesgado, por lo cual una vez más tendremos que corregir por el sesgo correspondiente.

Alternativamente, tenemos la tasa de evasión relativa al monto efectivamente cancelado, e, para la cual

$$\widehat{e} = (\widehat{\beta}_2 - 1)$$

es un estimador insesgado.

2.2 Evasión de un casillero

Ahora consideramos el problema de estimar el monto evadido por IVA por un grupo de firmas ('casillero'). Con tal objeto suponemos que se dispone de la información de la subsección anterior para una muestra aleatoria de firmas de tamaño k[14]. La i-ésima firma de la muestra pagó IVA durante el año en cuestión por V_i y denotamos mediante V el monto cancelado por concepto de IVA por todas las firmas del casillero (muestreadas y no muestreadas). Nos interesa estimar el monto que debió cancelar el casillero, C, el monto evadido por las firmas del casillero, E, y las tasas de evasión correspondientes.

La idea central es utilizar la información de la muestra con objeto de determinar la evasión promedio de una firma del casillero para luego inferir los montos de evasión agregados. Una alternativa es trabajar con el promedio simple de los $\widehat{\beta}_3$ definidos en la subsección anterior — esta es la alternativa natural sugerida por la teoría de muestreo. Sin embargo, la Proposición 2.2 puede ser utilizada para obtener un estimador más preciso, al tomar un promedio ponderado de los $\widehat{\beta}_3$ estimados para las firmas. La siguiente proposición especifica los ponderadores correspondientes:

Proposition 2.4 *Se denota mediante $\widehat{\beta}_{3,i}$ el estimador de la sección anterior para la firma i del casillero. Se supone que los β al interior del casillero son iguales (o que provienen de una misma distribución). Se define:*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}, \\ w_i &= \frac{1}{S_i}, \end{aligned}$$

[14]Es decir, una observación con inspección de punto fijo para cada firma y n_i observaciones en días anteriores al punto fijo para la firma i de la muestra.

donde los estimadores y sus varianzas se calculan en base a la Proposición 2.4 y $_i$ *está dado por:*

$$_i = \left\{ \mathrm{CV}^2 \left[1 + (1+\mathrm{CV}^2) \left(\frac{\mathrm{CV}_p^2}{n \cdot n_1 \cdot A^2 \cdot D^2} + \frac{1}{n_1 A^2} \right) \right] + \frac{\mathrm{CV}_p^2 (1+\mathrm{CV}^2)}{n D^2} \right\}.$$

Entonces el estimador:

$$\widehat{\beta} = \sum_{i=1}^{k} w_i \widehat{\beta}_{3,i}$$

es aquel estimador insesgado, lineal en los $\widehat{\beta}_{3,i}$*, de menor varianza*[15]*. Su desviación standard es igual a* $\widehat{\beta}/\sqrt{S}$*.*

Demostración Ver Apéndice D. ∎

Ahora estamos en condiciones de estimar el monto que debió haber cancelado en IVA el casillero, C, y el monto evadido correspondiente, E. También podemos estimar la tasa de evasión, ya sea relativa al monto que debió cancelarse, e, o al monto que efectivamente se canceló, ε. Con tal objeto denotamos mediante $\widehat{\beta}^{(1)}$ el promedio simple de los $\widehat{\beta}_{3,i}$ y por $\widehat{\beta}^{(2)}$ el promedio ponderado definido en la Proposición 2.4. Entonces los estimadores aproximadamente insesgados de C, E, e y ε vienen dados por:

$$\begin{aligned} \widehat{C} &= \widehat{\beta}^{(i)} V, \\ \widehat{E} &= (\widehat{\beta}^{(i)} - 1) V, \\ \widehat{e} &= \frac{\widehat{\beta}^{(i)} - 1}{\widehat{\beta}^{(i)}}, \\ \widehat{\varepsilon} &= \widehat{\beta}^{(i)} - 1, \end{aligned}$$

donde $i = 1, 2$[16].

2.3 Evasión agregada

Suponemos que las firmas de toda la economía se clasifican en N casilleros con firmas relativamente homogéneas perteneciendo a cada uno de ellos. Denotamos por $\widehat{\beta}_i$ el estimador de β para el casillero i, obtenido por alguno de

[15] En estricto rigor puede haber un sesgo de orden CV^5.

[16] En el caso de $\widehat{e}$ se requiere de un factor de corrección para obtener insesgamiento.

los dos métodos descritos en la sección anterior (promedio simple o promedio ponderado) y por V_i el monto efectivamente cancelado por IVA por todas las firmas pertenecientes al casillero i. Entonces el estimador del monto que debió haber cancelado por IVA toda la economía viene dado por:

$$\widehat{C} = \sum_i V_i \widehat{\beta}_i,$$

mientras que un estimador del monto evadido en toda la economía es:

$$\widehat{E} = \sum_i V_i(\widehat{\beta}_i - 1).$$

En consecuencia se propone como estimador de la tasa de evasión de IVA (por subdeclaración de ventas), relativo al monto efectivamente cancelado, a:

$$\widehat{\varepsilon} = \sum_i w_i(\widehat{\beta}_i - 1),$$

donde $w_i \equiv V_i / \sum_j V_j$. Y la tasa de evasión relativa al monto que debió ser cancelado se estima mediante:

$$\widehat{e} = \frac{\widehat{E}}{\widehat{C}} = \frac{\sum_i V_i(\widehat{\beta}_i - 1)}{\sum_i V_i \widehat{\beta}_i}.$$

Las varianzas de $\widehat{C}$, $\widehat{E}$ y $\widehat{\varepsilon}$ se calculan trivialmente, notando que en los tres casos se trata de una combinación lineal de estimadores independientes. Así, por ejemplo:

$$\sigma^2(\widehat{\varepsilon}) = \sum_i w_i^2 \sigma^2(\widehat{\beta}_i).$$

En cambio, el cálculo de la varianza de $\widehat{e}$ requiere aplicar el Método Delta (ver Apéndice B), obteniéndose una expresión para $\sigma^2(\widehat{e})$ que es función de $\widehat{e}$ y $\sigma^2(\widehat{\varepsilon})$:

$$\sigma^2(\widehat{e}) \simeq \frac{\sigma^2(\widehat{\varepsilon})}{(1+\widehat{\varepsilon})^4}.$$

3 Resultados

3.1 Detalles de implementación

3.1.1 Estratificación

Se utilizaron las siguientes 4 variables para estratificar la muestra (y definir los casilleros):

- **Actividad**: Ocho categorías: Agricultura, comercio mayorista, productos alimenticios, productos no alimenticios, restaurantes y hoteles, servicios financieros y diversos, otras actividades, sin actividad.
- **Tamaño**: Dos categorías: Grande y mediana, pequeña. Se consideró como grande y mediana aquellas firmas con ventas anuales superiores a 5000 UTM ($ 11,269,500).
- **Ubicación**: Algunas de las categorías fueron subdivididas en dos grupos: región metropolitana y resto del país. En los casos donde esta división dejaba muy pocas firmas en alguno de los grupos, se consideró el total del país.
- **Estructura de la sociedad**: Algunas categorías se subdividieron en dos o tres subcategorías de acuerdo a esta variable. Las posibles subdivisiones eran: personas naturales, otras sociedades con fines de lucro[17], sociedades anónimas. En algunos casos las sociedades anónimas y otras sociedades se agruparon bajo la denominación de "Sociedades".

El Cuadro 2 muestra los 41 casilleros a que dio origen la estratificación anterior. Cabe notar que el casillero 40 quedó vacío.

3.1.2 Trabajo de campo

La primera etapa del trabajo de campo se realizó entre el 25 de Noviembre y el 1 de Diciembre de 1996. En esta etapa se seleccionó una muestra de 206 contribuyentes para la realización del punto fijo[18]. De los 206 casos programados, 50 arrojaron inmediatamente resultados satisfactorios, 86 requirieron que se solicitara información adicional a los contribuyentes muestreados y los 70 restantes correspondieron a casos en que no se obtuvo información.

La segunda etapa del trabajo de campo se realizó entre el 14 de Julio y el 3 de Agosto de 1997. En este caso, la muestra programada fue de 366 contribuyentes. De los casos programados, se obtuvieron 210 firmas con la información requerida, mientras las 156 restantes correspondieron a casos en que no se obtuvo información.

[17] Abreviado en el Cuadro mediante "otras sociedades".

[18] Nótese que como la metodología estratifica de acuerdo a los casilleros, lo importante es que la muestra *al interior* de cada casillero sea aleatoria, no es necesario que este sea el caso a nivel de la muestra completa.

Tabla 2: Estratificación de la muestra ('casilleros')

Actividades	Tamaño	Ubicación	Tipo de contribuyente	Casillero
Agricultura	Grande y Mediana	Total País	Personas Naturales	1
			Sociedades	2
	Pequeña	Total País	Personas Naturales y Soc.	3
Comercio Mayorista	Grande y Mediana	Total País	Personas Naturales	4
			Otras sociedades	5
			Sociedades Anónimas	6
	Pequeña	Total País	Personas Naturales y Soc.	7
Productos Alimenticios	Grande y Mediana	Reg. Metrop.	Personas Naturales	8
			Sociedades	9
		Resto País	Personas Naturales	10
			Sociedades	11
	Pequeña	Reg. Metrop.	Personas Naturales y Soc.	12
		Resto País	Personas Naturales y Soc.	13
Productos no Alimenticios	Grande y Mediana	Reg. Metrop.	Personas Naturales	14
			Otras sociedades	15
			Sociedades Anónimas	16
		Resto País	Personas Naturales	17
			Otras sociedades	18
			Sociedades Anónimas	19
	Pequeña	Reg. Metrop.	Personas Naturales y Soc.	20
		Resto País	Personas Naturales y Soc.	21
Restaurantes y Hoteles	Grande y Mediana	Reg. Metrop.	Personas Naturales	22
			Otras sociedades	23
			Sociedades Anónimas	24
		Resto País	Personas Naturales	25
			Sociedades	26
	Pequeña	Reg..	Personas Naturales y Soc.	27
		Resto País	Personas Naturales y Soc.	28
Servicios Financieros y diversos	Grande y Mediana	Reg. Metrop.	Personas Naturales	29
			Otras sociedades	30
			Sociedades Anónimas	31
		Resto País	Personas Naturales	32
			Sociedades	33
	Pequeña	Reg. Metrop.	Personas Naturales y Soc.	34
		Resto País	Personas Naturales y Soc.	35
Otras Actividades	Grande y Mediana	Total País	Personas Naturales	36
			Otras sociedades	37
			Sociedades Anónimas	38
	Pequeña	Total País	Personas Naturales y Soc.	39
Sin Actividad	Grande y Mediana	Total País	Personas Naturales y Soc.	40
	Pequeña	Total País	Personas Naturales y Soc.	41

Luego de realizar las dos etapas del trabajo de campo se obtuvo una base de datos con información de 346 firmas, de las cuales se descartaron 7 firmas que no cumplían con los requisitos de información de la metodología, contándose finalmente con 339 firmas que contenían la información necesaria para realizar el estudio.

3.1.3 Haciendo comparables datos en fechas distintas

Con objeto de hacer comparables las observaciones de pagos por IVA en fechas anteriores a la de punto fijo, se procedió como sigue:

- Los datos de ventas de cada firma fueron separados en tres grupos:
  - Grupo 1: ventas en días inmediatamente anteriores al día del punto fijo.
  - Grupo 2: ventas en días del mes anterior a la realización del punto fijo que eran comparables al día del punto fijo (se consideraron como comparables aquellos días correspondientes al mismo día de la semana en que se realizó el punto fijo).
  - Grupo 3: ventas en días del año anterior a la realización del punto fijo comparables con el día en que se realizó el punto fijo. Se consideró como 'comparables' aquellos días correspondientes al mismo día de la semana y ubicados alrededor del mismo mes que el día en que posteriormente se realizó el punto fijo.
- Se calculó el promedio de las ventas para cada uno de los grupos descritos anteriormente. Para calcular estos promedios se consideraron sólo los días con ventas mayores que cero.
- Para cada firma se consideró como período base el mes en que fue realizado el punto fijo. Debido a esto, los datos del grupo 1 no fueron deflactados.
- Tanto para los días del grupo 2 (mes anterior) como para los del grupo 3 (año anterior) se utilizó como deflactor la razón entre el promedio de ventas del grupo 1 (días inmediatamente anteriores al día del punto fijo) y el promedio de ventas del grupo respectivo. Es decir, para los días del grupo 2 se utilizó como deflactor el promedio de ventas del grupo 1 dividido por el promedio de ventas del grupo 2 y para el grupo 3 el promedio del grupo 1 dividido por el promedio del grupo 3.

- En los casos en que el promedio de ventas del grupo 2 ó 3 era nulo (significando que no se disponía de datos de ventas para ese grupo de días), se consideró como deflactor para ese grupo la razón entre el IPC registrado en el mes de realización del punto fijo y el IPC registrado en el mes a que correspondían los datos de ventas del grupo. En los casos en que el promedio del grupo 1 era nulo también se consideró como como deflactor la razón de los IPC.

Con objeto de verificar que los supuestos anteriores no son cruciales, se reestimaron las tasas de evasión agregadas sin usar deflactor alguno y se obtuvieron tasas similares a las obtenidas con los deflactores antes descritos[19].

3.1.4 Datos omitidos y observaciones nulas

El número total de firmas encuestadas fue de 346 . Se dejaron fuera 7 lugares de venta en que la información sobre ventas en días anteriores al punto fijo era insuficiente (menos de 4 observaciones no nulas).

En 50 de las 136 firmas encuestadas en la primera parte del trabajo sólo se registró la información de los días 'comparables' del mes anterior del punto fijo. En el resto de las firmas encuestadas en la primera parte del trabajo de campo, asi como en todas aquellas encuestadas en la segunda parte, se registró toda la información.[20]

En 72 de las 339 firmas utilizadas en el estudio, se registraron observaciones nulas en días anteriores al punto fijo. Se nos ocurren las siguientes explicaciones posibles para estas observaciones. Primero, puede tratarse de días en que la evasión de IVA fue de un 100%. Segundo, pueden ser lugares de venta que tienen un número muy reducido de ventas diarias (v.g., bienes durables como casas o automóviles).

Con objeto de determinar la relevancia del segundo punto anterior, se obtuvo la información sobre el número de boletas entregadas el día de punto fijo en cada lugar de venta, encontrándose una correlación negativa entre el número de boletas entregadas y el valor $\widehat{\beta}_2$. En efecto, entre los lugares de venta que entregaron menos de tres boletas el día de punto fijo (34), el 76% tiene observaciones nulas en días anteriores al punto fijo. En cambio, entre

[19] Los resultados se presentan más adelante.

[20] Los días inmediatamente anteriores y los días comparables del mes y del año anterior al día del punto fijo.

los restantes lugares de venta este porcentaje cae a 15%. Esto indica que una fracción de las observaciones nulas tiene su explicación en el punto 2 pero también indica que esto no basta para explicar siquiera la mitad de los lugares con este tipo de observaciones[21].

Se excluyeron lugares de venta en que el número de boletas entregadas el día de punto fijo fue menor o igual que 7[22]. La justificación para esta decisión es que el método de punto fijo no es apropiado para detectar evasión en lugares con ventas infrecuentes, ya que en tal caso puede no cumplirse el supuesto de que la inspección de punto fijo no afecta el comportamiento de los compradores. De esta manera el número de firmas consideradas es de 265. Con objeto de verificar cuán robustas son nuestras conclusiones, también se repitieron las estimaciones tomando como punto de corte tener más de 3 boletas el día de punto fijo (en lugar de 7)[23].

3.2 Resultados a nivel de firma

El Cuadro 7, al final de este informe, muestra la información obtenida a nivel de firma: número de observaciones disponibles en días anteriores al punto fijo, n; número de observaciones no nulas entre las anteriores, n_1; coeficiente de variación de las observaciones no nulas, CV; valores estimados de las constantes A y D; valor estimado de $\widehat{\beta}_2$ y $\widehat{\beta}_3$ con sus respectivas desviaciones standard; y el número de boletas otorgadas el día de punto fijo.

Se observa que los coeficientes de variación de un número importante de firmas toma valores bastante altos (mayor que 0,5). Esto se traduce en desviaciones standard relativamente grandes para los $\widehat{\beta}_3$. De hecho, tenemos que sólo 21 del total de 265 firmas tienen un $\widehat{\beta}_2$ que es significativamente mayor que 1 (con nivel de significación del 95%, suponiendo una distribución normal para $\widehat{\beta}$), comparado con 20 firmas para las cuales $\widehat{\beta}_2$ es significativamente menor que 1 (¡!). Es claro que se requiere de mayores niveles de agregación para obtener resultados interesantes.

[21]Llama la atención que en todos los días con inspección de punto fijo se registraron ventas.

[22]No es posible tomar un criterio más exigente si se desea que haya al menos dos firmas en cada casillero.

[23]En tal caso hay 301 firmas.

3.3 Resultados a nivel de casillero

El Cuadro 3 resume las estimaciones obtenidas a nivel de casillero: valor estimado de β/p, tanto mediante promedio simple ($\bar{\beta}$) como promedio ponderado (β_p); y las desviaciones standard de los estimadores anteriores.

Para hacer inferencias respecto de la evasión de sectores específicos, consideramos las estimaciones obtenidas vía promedio ponderado, pues éstas tienen desviaciones standard más pequeñas que aquellas obtenidas mediante promedio simple. Observamos que hay 8 casilleros en que la tasa de evasión (recordar que esta se estima mediante $(\widehat{\beta}-1)/\widehat{\beta}$) es significativamente mayor que 20%, es decir, donde el valor estimado menos dos desviaciones standard ($\widehat{\beta} - 2\sigma(\widehat{\beta})$) excede 1.2. Estos casilleros son el 3 (Agricultura Pequeña) con una tasa de evasión que es al menos igual al 22%, el 5 (Comercio Mayorista, Grande y Mediano, Otras Sociedades) con al menos un 137%, los casilleros 12 y 13 (Productos Alimenticios Pequeñas) con al menos un 60 y 40% respectivamente, el 21 (Productos No Alimenticios, Pequeñas, No Región Metropolitana) con al menos un 30%, el 34 (Servicios Financieros y Diversos, Pequeñas, Región Metropolitana) con al menos un 100% el 39 (otras actividades, pequeña) con al menos un 34% y el 41 (Sin Actividad, Pequeña) con al menos un 166%.

Notamos al pasar que para tan sólo dos sectores se tiene que $\widehat{\beta}_2$ es significativamente menor que 1 (con nivel de significación del 95%), a diferencia de 20 sectores donde es significativamente mayor que 1. Si comparamos esto con la situación descrita para las firmas individuales, vemos como al pasar de firmas a casilleros se van reduciendo las estimaciones que no tienen sentido económico

El Cuadro 4 muestra las tasas de evasión de los diversos sectores de actividad económica, con sus desviaciones standard (estimaciones utilizando promedios ponderados). Ignorando el sector "Sin Actividad", tenemos que la actividad económica con mayor tasa de evasión de IVA es el Comercio Mayorista, con una tasa de evasión que podemos situar por sobre el 70%. El sector que ocupa el segundo lugar en tasas de evasión son los Servicios Financieros y Diversos, con una tasa de evasión del 26.8%. El tercer sector de actividad económica con tasas de evasión importantes es Restaurantes y Hoteles, con una tasa que llega al 13.2%.

El Cuadro 5 permite dimensionar la importancia absoluta de los distintos casilleros. La primera columna indica la fracción de la recaudación total de IVA que aporta el casillero correspondiente. La segunda columna indica

Tabla 3: Estimaciones por casillero

casillero	$\bar{\beta}$	β_p	$\sigma(\bar{\beta})$	$\sigma(\beta_p)$
1	0.99	0.20	1.18	0.22
2	0.78	0.37	0.67	0.23
3	1.62	0.13	1.42	0.10
4	1.28	0.20	1.12	0.09
5	4.02	1.35	6.02	1.84
6	1.12	0.17	1.03	0.15
7	4.93	0.73	1.36	0.09
8	1.07	0.10	1.15	0.06
9	0.97	0.19	1.11	0.11
10	1.56	0.30	1.12	0.12
11	0.80	0.20	0.92	0.06
12	2.03	0.24	1.84	0.12
13	1.83	0.26	1.80	0.20
14	1.38	0.20	1.46	0.18
15	1.14	0.09	1.10	0.07
16	0.90	0.14	1.06	0.09
17	1.20	0.14	1.10	0.11
18	0.85	0.10	1.14	0.06
19	0.99	0.18	1.03	0.10
20	1.18	0.23	1.19	0.19
21	2.11	0.28	1.46	0.08
22	1.96	0.33	1.31	0.08
23	1.22	0.18	1.06	0.10
24	1.09	0.16	0.88	0.04
25	1.51	0.23	1.19	0.12
26	1.81	0.25	1.35	0.12
27	1.23	0.16	1.27	0.09
28	2.01	0.28	1.25	0.07
29	0.95	0.17	1.00	0.17
30	1.02	0.26	1.10	0.26
31	1.11	0.22	1.32	0.16
32	2.33	0.49	1.29	0.10
33	2.36	0.63	1.48	0.16
34	5.02	1.58	4.24	1.12
35	1.74	0.29	1.15	0.07
36	1.52	0.45	0.78	0.05
37	1.17	0.14	1.04	0.06
38	1.65	0.52	1.14	0.19
39	1.33	0.14	1.53	0.09
41	2.29	0.25	3.20	0.27

Tabla 4: Evasión por Sector de Actividad Económica

Sector	$\widehat{e}$	$\sigma(\widehat{e})$
1	5.64	12.44
2	73.08	7.12
3	12.18	3.53
4	11.61	3.06
5	13.18	3.23
6	26.82	5.04
7	6.74	8.21
8	68.72	2.62

la fracción de IVA que cada casillero hubiese pagado si no hubiese habido evasión (considerando promedios ponderados). La tercera columna indica la fracción del monto de la evasión agregada de la cual es responsable el casillero.

Del Cuadro 5 se infiere que los casilleros que más IVA recaudan son el 15 (Productos No Alimenticios, Otras Sociedades) con un 13,0%, el 9 (Productos Alimenticios, Reg. Metrop., Grande y Mediana) con un 8,7%, el 16 (Productos No Alimenticios, Sociedades Anónimas) con un 8,5% y el 11 (Productos Alimenticios, Grande y Mediana, Resto País, Sociedades) con un 8,3%. Basado en las estimaciones obtenidas se tiene que el casillero que más evade, en términos absolutos, es el 5 (Comercio Mayorista, Grande y Mediana, Otras Sociedades) con un 52,7%. Le siguen los casilleros 13 (Productos Alimenticios, Pequeña, Resto País) con el 4,5%, el 15 (Productos No Alimenticios, Grande y Mediana, Reg. Metrop., Personas Naturales) con 3,8 y el 31 (Servicios Financieros y Diversos, Grande y Mediana, Región Metropolitana, Sociedades Anónimas) con un 3,6%..

3.4 Resultados a nivel agregado

La tasa de evasión agregada que se estima resulta ser 24,6% (promedio simple) y 24,4% (promedio ponderado), con desviaciones standard de 4,0 y 3,9%, respectivamente. En términos de pérdida de recaudación, estas tasas corresponden a aproximadamente 860 millones de dólares.

En lo que sigue realizamos una serie de análisis de sensibilidad de los

Tabla 5: Importancia de los distintos casilleros

casillero	Frac. rec.	Frac. rec. sin evasión	Frac. de evasión
1	0.38	0.34	0.20
2	0.21	0.11	0.00
3	0.10	0.11	0.12
4	0.82	0.69	0.30
5	3.51	15.97	52.47
6	2.15	1.67	0.19
7	0.09	0.10	0.10
8	3.10	2.69	1.35
9	8.74	7.36	2.96
10	5.36	4.54	1.91
11	8.26	5.74	0.00
12	1.23	1.71	3.09
13	1.87	2.55	4.46
14	2.54	2.81	3.52
15	13.00	10.78	3.76
16	8.49	6.82	1.60
17	4.10	3.41	1.22
18	5.91	5.08	2.44
19	0.76	0.59	0.07
20	0.71	0.64	0.41
21	0.87	0.96	1.20
22	0.49	0.49	0.45
23	1.78	1.43	0.32
24	0.79	0.53	0.00
25	0.86	0.77	0.47
26	1.01	1.03	1.06
27	0.21	0.20	0.17
28	0.45	0.42	0.33
29	0.85	0.64	0.01
30	1.75	1.45	0.53
31	3.73	3.72	3.54
32	1.29	1.26	1.12
33	0.96	1.08	1.37
34	0.36	1.15	3.47
35	0.44	0.38	0.19
36	1.97	1.16	0.00
37	3.98	3.13	0.49
38	6.04	5.23	2.59
39	0.60	0.69	0.94
41	0.24	0.58	1.56

resultados anteriores. Debido a que los valores estimados son similares con ambos métodos de estimación (promedio simple y promedio ponderado), y que las desviaciones standard son menores cuando se utiliza promedios ponderados, en lo que sigue nos centraremos en las estimaciones de evasión agregada obtenidas usando promedios ponderados.

En primer lugar notamos que los resultados obtenidos no dependen mayormente de cómo se deflactan las observaciones, es decir, de cómo se hace comparable la información de venta de fechas diferentes. En efecto, la tasa agregada de evasión que se obtiene si no se deflacta ninguna observación es de 21,7% considerando promedio simple, y 24,6% considerando promedio ponderado.

A continuación consideramos las estimaciones obtenidas si modificamos los puntos de corte para determinar si el número de boletas que la firma entregó el día de punto fijo es suficiente para que sea incluida en la muestra. Denotamos mediante N_1 el punto de corte anterior, de modo que se deja fuera todas aquellas firmas con N_1 o menos observaciones[24]. Recordemos que la metodología utilizada supone que los días en que una firma registró ventas iguales a cero son días donde la firma decidió evadir todo su impuesto. La idea es que si una firma emitió más de N_1 boletas el día del punto fijo, el supuesto anterior es, con una alta probabilidad, correcto.

El Cuadro 6 muestra las tasas agregadas de evasión obtenidas para distintos valores de N_1.

Tabla 6: Tasas agregadas de evasión: promedios ponderados

n_1	$\widehat{e}$	$\sigma(\widehat{e})$
0	20.0	2.2
3	20.0	2.8
5	20.0	2.8
7	24.4	3.9
10	12.1	2.6

En el Cuadro 6 se observa que las tasas de evasión que más nos interesan no varían de manera importante si se sustituye N_1 por valores algo menores. En efecto, si se trabaja con valores de N_1 iguales a 5 ó 3 (en lugar de 7)

[24]En las estimaciones reportadas, se trabajó con N_1 igual a siete.

se obtienen tasas de evasión algo menores (alrededor de un 4% menor). La mayor variación se observa al utilizar N_1 igual a 10 (alrededor de un 12%). Esto se debe a que el valor de N_1 es demasiado exigente, por lo cual dejamos afuera a muchas firmas con observaciones nulas[25].

En general, las estimaciones obtenidas al hacer un análisis de sensibilidad se encuentran dentro de intervalos de confianza razonables para las estimaciones obtenidas.

Referencias

[1] Cowell, F., *Cheating the Government: The Economics of Tax Evasion*, Cambridge, Mass.: MIT Press, 1990

[2] Jorrat, M.,

[3] Miller, R.G., *BEYOND ANOVA, Basics of Applied Statistics*, Nueva York: J. Wiley, 1986.

[4] Serra, P., *Estimación de la Evasión en el Impuesto al Valor Agregado*, mimeo, 1991.

[25] Bajamos de 34 firmas con 175 observaciones nulas para $N_1 = 7$ a 26 firmas con 108 observaciones nulas para $N_1 = 10$.

Apéndices

A.: Demostración de la Proposición 1

La demostración de la Proposición 1 se basa en los siguientes tres lemas:

Lema 1 Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d., con media μ y varianza σ^2. Denotamos mediante $\overline{X} = \sum X_i/n$ el promedio correspondiente y mediante $\sigma^2(Y)$, $\mathrm{CV}(Y)$, $\gamma(Y)$ y $\kappa(Y)$ la varianza, el coeficiente de variación, el coeficiente de asimetría y la kurtosis de una variable aleatoria Y[26]. Entonces;

$$\begin{aligned} \sigma^k(\overline{X}) &= \frac{1}{n^{k/2}}\sigma^k(X_1), & (9)\\ \mathrm{CV}(\overline{X}) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{CV}(X_1), & (10)\\ \gamma(\overline{X}) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\gamma(X_1), & (11)\\ \kappa(\overline{X}) &= 3+\frac{1}{n}(\kappa(X_1)-3). & (12) \end{aligned}$$

Demostración:

La expresión (9) se obtiene a partir de:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\overline{X}) &= \sigma^2\left(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum X_i\right)\\ &= \tfrac{1}{n^2}\sigma^2(\textstyle\sum X_i)\\ &= \tfrac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2(X_1). \end{aligned}$$

La expresión (10) sigue directamente de la anterior y del hecho que el valor esperado de $\overline{X}$ es igual al valor esperado de X_1.

Para derivar (11) notamos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(\overline{X}-\mu)^3] &= \mathrm{E}\left[\left(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)\right)^3\right]\\ &= \tfrac{1}{n^3}\textstyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \mathrm{E}[(X_i-\mu)(X_j-\mu)(X_k-\mu)]\\ &= \tfrac{1}{n^3}\textstyle\sum_{i=1}^n \mathrm{E}[(X_i-\mu)^3]\\ &= \tfrac{1}{n^2}\mathrm{E}[(X_1-\mu)^3], \end{aligned}$$

[26] Véase (1), (2) y (3) para las definiciones correspondientes.

donde se usó el hecho que los únicos términos de la triple sumatoria que (eventualmente) son distintos de cero son aquellos en que los tres índices son iguales[27].

Luego, aplicando (9) tendremos:

$$\begin{aligned}\gamma(\overline{X}) &= \frac{\mathrm{E}[(\overline{X}-\mu)^3]}{\sigma^3(\overline{X})}\\ &= \frac{\frac{1}{n^2}\mathrm{E}[(X_1-\mu)^3]}{\frac{1}{n^{3/2}}\sigma^3(X_1)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\gamma(X_1),\end{aligned}$$

Finalmente, para derivar (12) notamos que:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(\overline{X}-\mu)^4] &= \mathrm{E}\left[\left(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)\right)^4\right]\\ &= \tfrac{1}{n^4}\textstyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n \mathrm{E}[(X_i-\mu)(X_j-\mu)(X_k-\mu)(X_l-\mu)]\\ &= \tfrac{1}{n^4}\left\{n\mathrm{E}[(X_1-\mu)^4]+3n(n-1)\sigma^4(X_1)\right\}\\ &= \tfrac{1}{n^3}\left\{\mathrm{E}[(X_1-\mu)^4]+3(n-1)\sigma^4(X_1)\right\},\end{aligned}$$

donde se usó el hecho que en la cuádruple sumatoria los términos distintos de cero son sólo aquellos de la forma $\mathrm{E}[(X_i-\mu)^2(X_j-\mu)^2]$, los cuales son igual a $\mathrm{E}[(X_1-\mu)^4]$ si $i=j$ e iguales a $\sigma^4(X_1)$ si $i\neq j$.

Luego, aplicando (9) tendremos:

$$\begin{aligned}\kappa(\overline{X}) &= \frac{\mathrm{E}[(\overline{X}-\mu)^4]}{\sigma^4(\overline{X})}\\ &= \frac{\frac{1}{n^3}\{\mathrm{E}[(X_1-\mu)^4]+(3n-1)\sigma^4(X_1)\}}{\frac{1}{n^2}\sigma^4(X_1)}\\ &= 3+\tfrac{1}{n}(\kappa(X_1)-3). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Lema 2 Sea X una variable aleatoria con media μ, varianza σ^2, coeficiente de asimetría γ y kurtosis κ[28]. Sea $f(x)$ una función de variable real a valores

[27] Si los tres índices son distintos, por independencia de los X_i se tiene que el término es igual al producto de tres términos de la forma $\mathrm{E}(X_i-\mu)$, todos los cuales son iguales a cero. Si el término es de la forma $\mathrm{E}[(X_i-\mu)^2(X_k-\mu)]$ con $k\neq i$, por independencia de X_i y X_k se tendrá que éste será igual al producto de la esperanza de ambas expresiones y como $\mathrm{E}(X_k-\mu)=0$ se concluye que es igual a cero.

[28] Para las definiciones de γ y κ véase (2) y (3).

reales que tiene quinta derivada contínua. Entonces:

$$\mathrm{E}[f(X)] \simeq f(\mu) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 f''(\mu) + \tfrac{1}{6}\sigma^3\gamma f'''(\mu) + \tfrac{1}{24}\sigma^4\kappa f^{(IV)}(\mu). \tag{13}$$

Demostración: Mediante desarrollo de Taylor se obtiene:

$$f(X) \simeq f(\mu) + \sum_{k=1}^{4} \frac{(X-\mu)^k}{k!} f^{(k)}(\mu)$$

de donde se pasa a (13) tomando valor esperado y notando que $\mathrm{E}(X-\mu) = 0$. ∎

Lema 3 Sean X e Y variables aleatorias independientes, cuyas medias son μ_X y μ_Y, y cuyas varianzas son σ_X^2 y σ_Y^2, y denotemos $Z = X/Y$. Entonces:

$$\mathrm{E}[Z] \simeq \frac{\mu_X}{\mu_Y}\left(1 + \mathrm{CV}_Y^2 - \gamma_Y \mathrm{CV}_Y^3 + \kappa_Y \mathrm{CV}_Y^4\right),$$

donde CV_Y, γ_Y y κ_Y denotan el coeficiente de variación, el coeficiente de asimetría y la kurtosis de Y.

Demostración: Como X e Y son independientes, se tiene que:

$$\mathrm{E}\left[\frac{X}{Y}\right] = \mathrm{E}[X] \cdot \mathrm{E}\left[\frac{1}{Y}\right].$$

La demostración se completa calculando $\mathrm{E}\left[1/Y\right]$ mediante el Lema 2. ∎

Demostración de la Proposición 1

Denotemos mediante X_i la variable aleatoria que da origen a x_i y mediante Y la variable aleatoria que da origen a y. Sean $\overline{X} = \sum X_i/n$ y $T = Y/\overline{X}$. Aplicando el Lema 3 con $\overline{X}$ en lugar de X se obtiene:

$$\mathrm{E}[T] \simeq \beta\left(1 + \mathrm{CV}^2(\overline{X}) - \gamma(\overline{X})\mathrm{CV}^3(\overline{X}) + \kappa(\overline{X})\mathrm{CV}^4(\overline{X})\right).$$

Luego, sustituyendo $\mathrm{CV}^2(\overline{X})$, $\gamma(\overline{X})$ y $\kappa(\overline{X})$ por las expresiones derivadas en el Lema 1 se obtiene:

$$\mathrm{E}[T] \simeq A\beta,$$

por lo cual, como $\widehat{\beta}_1 = T/A$, se concluye que $\widehat{\beta}_1$ es (aproximadamente) insesgado.[29]. ∎

B.: Demostración de la Proposición 2

La demostración de la Proposición 2 se basa en los siguientes tres lemas:

Lema 1 Si U y V son variables aleatorias independientes con segundos momentos finitos, entonces

$$\mathrm{Var}[UV] = \mathrm{Var}[U]\mathrm{Var}[V] + \mathrm{E}^2[U]\mathrm{Var}[V] + \mathrm{E}^2[V]\mathrm{Var}[U],$$

donde $\mathrm{E}^2[X]$ denote el cuadrado del valor esperado de la variable aleatoria X.

Demostración: Consecuencia inmediata de identidades elementales de probabilidades. ∎

Lema 2 Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. con media común μ y denotemos mediante $\overline{X}$ el promedio correspondiente. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\frac{1}{\overline{X}}\right] &\simeq \frac{A}{\mu}, \\ \mathrm{Var}\left[\frac{1}{\overline{X}}\right] &\simeq \frac{\mathrm{CV}^2}{n\mu^2}. \end{aligned}$$

Demostración: Aun cuando se puede derivar a partir del Lema 2 del Apéndice A, la versión que presentamos se sigue directamente del llamado 'método delta', según el cual, para una variable aleatoria Z con media μ_Z se tiene que[30]:

$$\mathrm{Var}[g(Z)] \simeq [g'(\mu_Z)]^2\mathrm{Var}[Z].$$

[29] Nótese que la expresión es sólo aproximada, debido a que el desarrollo de Taylor considerado en el Lema 2 es hasta cuarto orden. De hecho, un cálculo similar a los realizados anteriormente en este apéndice muestra que el término que sigue es $\{15(n-1)\gamma(X_1) + \nu(X_1)\}\mathrm{CV}^5(X_1)/n^4$, donde $\nu(X_1)$ denota el quinto momento centrado y normalizado de X_1.

[30] Para el enunciado del método delta véase, por ejemplo, Miller (1986).

Tomando $g(x) = 1/x$ y $Z = \overline{X}$ lleva a:

$$\mathrm{Var}\left[\frac{1}{\overline{X}}\right] \simeq \frac{\mathrm{CV}^2(\overline{X})}{\mu^2},$$

lo cual combinado con (10) completa la demostación. ∎

Demostración de la Proposición 2

Denotemos mediante X_i la variable aleatoria que da origen a x_i y mediante Y la variable aleatoria que da origen a y. Sean $\overline{X} = \sum X_i/n$. Entonces, utilizando los lemas anteriores:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\widehat{\beta}_1] &= \mathrm{Var}\left[\frac{Y}{A\overline{X}}\right] \\
&= \frac{1}{A^2}\mathrm{Var}\left[\frac{Y}{\overline{X}}\right] \\
&= \frac{1}{A^2}\Big\{\mathrm{Var}[Y]\mathrm{Var}[1/\overline{X}] + \mathrm{E}^2[Y]\mathrm{Var}[1/\overline{X}] + \mathrm{E}^2[1/\overline{X}]\mathrm{Var}[Y]\Big\} \\
&\simeq \frac{1}{A^2}\left\{[\beta^2\sigma^2 + \beta^2\mu^2]\frac{\mathrm{CV}^2}{n\mu^2} + \beta^2\sigma^2\frac{A^2}{\mu^2}\right\} \\
&\simeq \beta^2\mathrm{CV}^2\left\{1 + \frac{1+\mathrm{CV}^2}{nA^2}\right\}.
\end{aligned}$$

Aun cuando la expresión anterior es la utilizaada en los cálculos correspondientes, esta se puede simplificar si se ignoran términos de orden CV^4 o más altos. En efecto, notanto que:

$$\frac{1}{A^2} \simeq 1 - \frac{2}{n}\mathrm{CV}^2,$$

y sustituyendo esta expresión en la expresión recién obtenida se obtiene:

$$\mathrm{Var}[\widehat{\beta}_1] \simeq \widehat{\mathrm{CV}}^2\left\{\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) - \frac{2}{n^2}\widehat{CV}\right\}.$$

C.: Demostración de la Proposición 3

Las expresiones para CV_p, γ_p yκ_p se obtienen a partir de cálculos elementales, que utilizan reiteradamente el hecho que si Z sigue una distribución Bernoulli de parámetro p y k denota un entero positivo, entonces, como $Z^k \equiv Z$, se cumple que $\mathrm{E}[Z^k] = p$.

Cabe notar que $\widehat{p} = \overline{Z}$, donde $\overline{Z}$ es el promedio de n variables i.i.d. Bernoulli con probabilidad de éxito p. Luego aplicando el argumento de la demostración de la Proposición 1 tanto a $1/\overline{X}$ como a $1/\overline{Z}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\frac{y}{\widehat{p}\overline{X}}\right] &= \mu_Y \mathrm{E}\left[\frac{1}{\widehat{p}}\right] \mathrm{E}\left[\frac{1}{\widehat{X}}\right] \\ &\simeq \mu_Y \frac{D}{p}\frac{A}{\mu_X} \\ &= \frac{AD\beta}{p}, \end{aligned}$$

por lo cual es necesario dividir $y/\overline{x}\widehat{p}$ por AD para obtener un estimador insesgado de β/p.

Para calcular la varianza de $\widehat{\beta}_3$, denotamos $K = AD$ y aplicamos dos veces el Lema 1 del Apéndice B, obteniendo:

$$\mathrm{Var}(\widehat{\beta}_3) = \frac{1}{K^2}\Big\{[\mathrm{Var}(Y) + \mathrm{E}^2(y)][\mathrm{Var}(1/\overline{X})\mathrm{Var}(1/\overline{Z}) + \mathrm{E}^2(1/\overline{X})\mathrm{Var}((1/\overline{Z}) + \mathrm{E}^2(1/\overline{Z})\mathrm{Var}((1/\overline{X})] + \tag{14}$$

Por el método Delta (ver demostración del Lema 2 del Apéndice B) y el Lema 1 del Apéndice A se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(1/\overline{X}) &\simeq \frac{\mathrm{CV}^2}{n_1\mu^2}, \\ \mathrm{Var}(1/\overline{Z}) &\simeq \frac{\mathrm{CV}_p^2}{np^2}. \end{aligned}$$

Por otra parte, del Lema 2 del Apéndice B se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(1/\overline{X}) &\simeq \frac{A}{\mu}, \\ \mathrm{E}(1/\overline{Z}) &\simeq \frac{D}{p}. \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (14) y recordando que $\mathrm{E}[Y] = \beta\mu$ y $\mathrm{Var}[Y] = \beta^2\sigma^2$ se obtiene la expresión para $\mathrm{Var}(\widehat{\beta}_3)$ mencionada en el texto principal. ∎

D.: Demostración de la Proposición 4

El estimador $\widehat{\beta}$ es insesgado porque es un promedio ponderado[31] de estimadores insesgados. Como además los estimadores son independientes, se tiene que la varianza de $\widehat{\beta}$ viene dada por:

$$\mathrm{Var}[\widehat{\beta}] = \sum_{i=1}^{k} w_i^2 \mathrm{Var}[\widehat{\beta}_{3,i}].$$

Luego, los ponderadores w_i que minimizan $\mathrm{Var}(\widehat{\beta})$ se obtienen resolviendo el siguiente problema:

$$\begin{array}{rl} \mathrm{Min}_{w_i} & \sum_{i=1}^{k} w_i^2 \mathrm{Var}[\widehat{\beta}_{3,i}] \\ s.a & \sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \end{array}$$

Un cálculo trivial muestra que el w_i óptimo es inversamente proporcionales a $\mathrm{Var}(\widehat{\beta}_{3,i})$. Combinado con el hecho que $\sum_i w_i = 1$ esto determina la expresión obtenida para w_i, donde se ha reemplazado $\widehat{\beta}_{3,i}$ por $\widehat{\beta}$ debido al supuesto de valores comunes de β y p al interior de un casillero. ∎

[31] Es decir, una combinación lineal cuyos coeficientes suman uno.

Tabla 7: Información a nivel de firma

Firma	n	n_1	n_0	CV	A	D	β_3	σ_{β_3}	n_b.
1	4	4	0	0.20	1.01	1.00	1.50	0.33	55
2	30	30	0	0.32	1.00	1.00	0.49	0.16	46
3	9	9	0	0.80	1.08	1.00	0.17	0.15	1
4	31	21	10	0.70	1.02	1.02	0.50	0.39	1
5	33	30	3	0.54	1.01	1.00	0.70	0.42	19
6	31	31	0	0.47	1.01	1.00	0.59	0.28	210
7	26	26	0	1.19	1.06	1.00	1.05	1.31	8
8	4	4	0	0.07	1.00	1.00	1.18	0.09	515
9	5	5	0	0.14	1.00	1.00	0.38	0.06	5
10	31	30	1	0.13	1.00	1.00	2.06	0.46	9
11	29	29	0	0.64	1.01	1.00	0.79	0.52	5
12	4	4	0	0.08	1.00	1.00	1.10	0.10	86
13	29	29	0	0.23	1.00	1.00	1.28	0.30	413
14	29	29	0	0.56	1.01	1.00	3.38	1.92	16
15	29	29	0	0.31	1.00	1.00	0.68	0.22	135
16	27	23	4	1.01	1.05	1.01	1.16	1.26	1
17	24	17	7	0.89	1.05	1.02	1.76	1.74	3
18	28	28	0	0.41	1.01	1.00	1.52	0.64	77
19	28	17	11	0.74	1.03	1.02	1.49	1.23	3
20	17	17	0	0.40	1.01	1.00	0.65	0.27	15
21	29	29	0	0.55	1.01	1.00	0.37	0.21	27
22	29	29	0	1.01	1.04	1.00	0.19	0.20	4
23	30	30	0	0.92	1.03	1.00	0.13	0.12	6
24	27	27	0	0.44	1.01	1.00	0.17	0.08	6
25	28	26	2	0.65	1.02	1.00	1.07	0.76	8
26	28	10	18	0.31	1.01	1.07	9.96	4.46	8
27	25	17	8	0.82	1.04	1.02	1.13	1.03	-1
28	26	17	9	0.89	1.05	1.02	3.17	3.14	1
29	28	28	0	0.62	1.01	1.00	1.02	0.64	17
30	20	11	9	0.32	1.01	1.05	1.83	0.83	2
31	4	4	0	0.24	1.01	1.00	0.49	0.13	82
32	29	29	0	0.26	1.00	1.00	1.09	0.29	55
33	20	19	1	0.72	1.03	1.00	0.45	0.36	5
34	31	31	0	0.36	1.00	1.00	1.72	0.63	161
35	31	6	25	0.26	1.01	1.18	12.07	5.51	1
36	28	28	0	0.32	1.00	1.00	1.18	0.38	133

Tabla 7: (continuación)

Firma	n	n_1	n_0	CV	A	D	β_3	σ_{β_3}	n_b.
37	25	9	16	0.79	1.08	1.08	0.12	0.12	1
38	28	18	10	1.06	1.07	1.02	1.26	1.47	3
39	5	5	0	0.06	1.00	1.00	0.90	0.06	75
40	5	5	0	0.15	1.00	1.00	1.88	0.31	8
41	31	17	14	0.46	1.01	1.03	18.38	9.92	20
42	22	22	0	0.31	1.00	1.00	1.21	0.39	22
43	27	27	0	0.40	1.01	1.00	2.28	0.93	17
44	32	32	0	0.38	1.00	1.00	0.78	0.30	1257
45	29	29	0	0.41	1.01	1.00	1.34	0.56	161
46	31	31	0	0.45	1.01	1.00	0.84	0.38	47
47	31	31	0	0.15	1.00	1.00	1.28	0.20	261
48	31	31	0	0.33	1.00	1.00	0.97	0.32	92
49	31	31	0	0.44	1.01	1.00	1.02	0.46	29
50	31	31	0	0.13	1.00	1.00	0.98	0.13	68
51	31	31	0	0.13	1.00	1.00	1.49	0.20	171
52	31	31	0	0.08	1.00	1.00	1.15	0.10	195
53	31	31	0	0.17	1.00	1.00	0.83	0.14	114
54	32	32	0	0.68	1.01	1.00	0.43	0.30	34
55	29	27	2	0.68	1.02	1.00	0.94	0.69	6
56	28	28	0	0.31	1.00	1.00	1.84	0.59	48
57	28	28	0	0.43	1.01	1.00	1.06	0.47	-1
58	31	31	0	0.36	1.00	1.00	1.04	0.38	148
59	31	30	1	0.61	1.01	1.00	0.95	0.62	24
60	30	30	0	0.24	1.00	1.00	0.97	0.24	348
61	28	28	0	0.48	1.01	1.00	0.66	0.33	24
62	27	27	0	0.19	1.00	1.00	1.05	0.21	57
63	31	31	0	0.21	1.00	1.00	1.23	0.26	54
64	28	28	0	0.24	1.00	1.00	1.04	0.25	418
65	28	28	0	1.47	1.08	1.00	0.47	0.72	125
66	5	5	0	0.14	1.00	1.00	1.09	0.17	137
67	30	29	1	0.33	1.00	1.00	0.83	0.32	104
68	29	29	0	0.28	1.00	1.00	0.97	0.28	30
69	25	25	0	0.70	1.02	1.00	0.85	0.61	271
70	17	15	2	1.16	1.10	1.01	5.18	6.73	26
71	28	28	0	0.36	1.00	1.00	1.99	0.74	128
72	31	27	4	0.52	1.01	1.00	1.31	0.76	15

Tabla 7: (continuación)

Firma	n	n_1	n_0	CV	A	D	β_3	σ_{β_3}	n_b.
73	31	31	0	0.36	1.00	1.00	1.03	0.37	391
74	31	31	0	0.33	1.00	1.00	0.81	0.27	65
75	4	4	0	0.07	1.00	1.00	0.99	0.08	1325
76	5	5	0	0.12	1.00	1.00	0.71	0.10	355
77	31	31	0	1.34	1.06	1.00	0.43	0.60	102
78	30	30	0	0.44	1.01	1.00	0.83	0.37	118
79	31	31	0	0.25	1.00	1.00	0.90	0.23	1221
80	28	28	0	0.32	1.00	1.00	0.95	0.31	234
81	5	5	0	0.08	1.00	1.00	1.88	0.15	181
82	4	4	0	0.21	1.01	1.00	0.96	0.22	44
83	28	27	1	0.31	1.00	1.00	4.54	1.72	132
84	30	27	3	0.36	1.00	1.00	1.60	0.67	16
85	30	30	0	0.55	1.01	1.00	2.26	1.27	124
86	30	30	0	0.22	1.00	1.00	1.01	0.22	22
87	33	32	1	0.19	1.00	1.00	1.97	0.51	34
88	5	5	0	0.22	1.01	1.00	1.15	0.28	18
89	5	5	0	0.15	1.00	1.00	1.88	0.32	51
90	5	5	0	0.22	1.01	1.00	1.43	0.35	75
91	32	32	0	0.48	1.01	1.00	0.84	0.41	13
92	30	30	0	0.33	1.00	1.00	3.85	1.28	71
93	5	5	0	0.24	1.01	1.00	2.39	0.62	52
94	29	29	0	0.37	1.00	1.00	1.13	0.43	61
95	30	30	0	0.27	1.00	1.00	1.24	0.34	262
96	30	13	17	0.66	1.04	1.05	8.66	6.62	1
97	26	26	0	0.34	1.00	1.00	0.34	0.12	93
98	28	28	0	0.47	1.01	1.00	0.49	0.24	4
99	23	23	0	0.39	1.01	1.00	1.81	0.72	25
100	28	28	0	0.57	1.01	1.00	1.39	0.81	10
101	28	28	0	0.63	1.01	1.00	0.31	0.20	5
102	31	24	7	0.89	1.03	1.01	1.31	1.26	6
103	28	28	0	0.28	1.00	1.00	1.38	0.39	40
104	5	5	0	0.15	1.00	1.00	1.07	0.18	730
105	33	33	0	0.12	1.00	1.00	1.17	0.15	290
106	23	23	0	0.39	1.01	1.00	1.37	0.54	12
107	28	28	0	0.73	1.02	1.00	0.21	0.16	7
108	31	31	0	0.23	1.00	1.00	1.00	0.23	168

Tabla 7: (continuación)

Firma	n	n_1	n_0	CV	A	D	β_3	σ_{β_3}	n_b.
109	27	27	0	0.41	1.01	1.00	1.88	0.79	17
110	28	28	0	0.38	1.01	1.00	0.74	0.29	24
111	28	28	0	0.26	1.00	1.00	0.79	0.21	151
112	31	31	0	0.30	1.00	1.00	0.76	0.23	113
113	31	28	3	0.36	1.00	1.00	1.15	0.48	124
114	28	28	0	0.28	1.00	1.00	1.04	0.30	98
115	28	28	0	0.43	1.01	1.00	1.64	0.72	34
116	28	28	0	0.28	1.00	1.00	1.13	0.32	24
117	31	31	0	0.26	1.00	1.00	1.17	0.31	411
118	31	31	0	0.24	1.00	1.00	1.02	0.25	250
119	4	4	0	0.08	1.00	1.00	1.10	0.10	964
120	27	27	0	0.32	1.00	1.00	0.68	0.23	37
121	28	28	0	0.26	1.00	1.00	1.15	0.30	77
122	26	26	0	0.45	1.01	1.00	0.68	0.32	16
123	4	4	0	0.26	1.02	1.00	1.64	0.48	51
124	2	2	0	0.22	1.03	1.00	1.26	0.34	246
125	27	27	0	0.49	1.01	1.00	1.13	0.57	31
126	27	27	0	0.40	1.01	1.00	0.64	0.26	39
127	4	4	0	0.48	1.07	1.00	0.98	0.53	46
128	27	24	3	0.64	1.02	1.00	0.93	0.65	3
129	26	26	0	0.57	1.01	1.00	2.81	1.65	25
130	30	30	0	0.36	1.00	1.00	1.05	0.38	18
131	31	31	0	0.41	1.01	1.00	0.48	0.20	35
132	31	31	0	0.46	1.01	1.00	1.67	0.78	39
133	31	31	0	0.27	1.00	1.00	1.08	0.29	137
134	28	28	0	0.45	1.01	1.00	0.32	0.14	92
135	23	23	0	0.24	1.00	1.00	0.72	0.18	157
136	31	31	0	0.40	1.01	1.00	1.07	0.43	52
137	27	27	0	0.50	1.01	1.00	2.00	1.03	25
138	4	4	0	0.22	1.01	1.00	0.86	0.22	62
139	5	5	0	0.14	1.00	1.00	1.10	0.17	234
140	4	4	0	0.05	1.00	1.00	1.24	0.07	788
141	4	4	0	0.17	1.01	1.00	0.68	0.13	23
142	4	4	0	0.31	1.02	1.00	0.62	0.21	94
143	31	31	0	0.23	1.00	1.00	0.76	0.18	251
144	27	27	0	0.59	1.01	1.00	0.65	0.39	9

Tabla 7: (continuación)

Firma	n	n_1	n_0	CV	A	D	β_3	σ_{β_3}	n_b.
145	5	5	0	0.21	1.01	1.00	0.74	0.17	109
146	29	29	0	0.28	1.00	1.00	0.95	0.27	17
147	29	29	0	0.89	1.03	1.00	0.65	0.59	9
148	27	27	0	0.76	1.02	1.00	1.23	0.96	5
149	28	28	0	0.31	1.00	1.00	1.51	0.47	72
150	27	27	0	0.18	1.00	1.00	1.25	0.23	141
151	31	31	0	0.20	1.00	1.00	0.85	0.17	572
152	27	24	3	1.91	1.19	1.00	0.01	0.02	1
153	5	5	0	0.26	1.01	1.00	0.81	0.23	15
154	4	4	0	0.25	1.02	1.00	1.22	0.34	3
155	28	28	0	0.53	1.01	1.00	0.44	0.24	2
156	28	28	0	0.54	1.01	1.00	1.04	0.58	8
157	25	16	9	0.18	1.00	1.02	1.35	0.41	25
158	28	25	3	0.38	1.01	1.00	1.53	0.67	16
159	31	31	0	0.48	1.01	1.00	0.78	0.38	6
160	27	23	4	2.49	1.42	1.01	0.51	1.41	4
161	4	4	0	0.06	1.00	1.00	1.40	0.09	105
162	5	5	0	0.18	1.01	1.00	1.46	0.28	161
163	4	4	0	0.19	1.01	1.00	1.06	0.23	16
164	27	27	0	0.36	1.00	1.00	0.94	0.35	29
165	29	29	0	0.52	1.01	1.00	3.58	1.90	21
166	32	31	1	0.28	1.00	1.00	1.91	0.65	9
167	23	21	2	0.64	1.02	1.00	0.56	0.40	2
168	26	23	3	0.51	1.01	1.01	1.48	0.85	20
169	21	21	0	0.47	1.01	1.00	5.06	2.47	11
170	4	4	0	0.23	1.01	1.00	2.36	0.61	25
171	32	32	0	0.43	1.01	1.00	0.92	0.40	56
172	28	28	0	0.15	1.00	1.00	0.96	0.15	51
173	31	31	0	0.07	1.00	1.00	1.31	0.10	66
174	28	28	0	0.22	1.00	1.00	1.07	0.24	19
175	30	20	10	0.78	1.03	1.02	5.12	4.41	155
176	4	4	0	0.14	1.01	1.00	1.17	0.19	54
177	5	5	0	0.13	1.00	1.00	0.96	0.13	2615
178	31	31	0	0.38	1.00	1.00	1.15	0.44	22
179	31	31	0	0.25	1.00	1.00	0.90	0.23	57
180	22	22	0	0.54	1.01	1.00	1.90	1.06	52

Tabla 7: (continuación)

Firma	n	n_1	n_0	CV	A	D	β_3	σ_{β_3}	n_b.
181	4	4	0	0.04	1.00	1.00	0.83	0.04	610
182	25	25	0	0.22	1.00	1.00	0.98	0.22	49
183	28	28	0	0.19	1.00	1.00	1.18	0.22	231
184	31	31	0	0.45	1.01	1.00	0.89	0.41	17
185	26	26	0	0.74	1.02	1.00	1.18	0.90	43
186	24	24	0	0.51	1.01	1.00	0.79	0.41	9
187	26	26	0	0.36	1.01	1.00	1.73	0.64	843
188	26	26	0	0.21	1.00	1.00	1.10	0.24	911
189	5	5	0	0.12	1.00	1.00	0.84	0.11	35
190	4	4	0	0.48	1.07	1.00	1.65	0.90	21
191	28	28	0	0.39	1.01	1.00	0.25	0.10	7
192	28	28	0	0.40	1.01	1.00	1.78	0.73	36
193	30	30	0	0.32	1.00	1.00	2.40	0.77	65
194	31	31	0	0.66	1.01	1.00	1.09	0.73	34
195	27	27	0	0.22	1.00	1.00	0.96	0.22	70
196	31	31	0	0.31	1.00	1.00	1.82	0.58	53
197	4	4	0	0.25	1.02	1.00	1.90	0.54	25
198	5	5	0	0.13	1.00	1.00	1.26	0.18	166
199	5	3	2	0.23	1.02	1.19	6.94	3.95	3
200	33	33	0	0.62	1.01	1.00	1.87	1.19	41
201	9	9	0	0.32	1.01	1.00	0.29	0.10	2
202	31	31	0	0.17	1.00	1.00	1.19	0.21	576
203	31	31	0	0.38	1.00	1.00	3.69	1.44	27
204	31	4	27	0.64	1.12	1.32	6.42	5.57	2
205	31	31	0	0.17	1.00	1.00	0.96	0.16	661
206	5	5	0	0.12	1.00	1.00	1.08	0.14	27
207	31	31	0	0.30	1.00	1.00	1.17	0.36	44
208	30	27	3	0.44	1.01	1.00	1.18	0.59	22
209	30	30	0	0.42	1.01	1.00	1.09	0.47	81
210	32	32	0	0.41	1.01	1.00	1.57	0.66	16
211	29	29	0	0.36	1.00	1.00	1.24	0.46	27
212	28	28	0	0.32	1.00	1.00	1.06	0.35	26
213	31	31	0	1.09	1.04	1.00	0.21	0.24	12
214	31	31	0	0.38	1.00	1.00	0.80	0.31	4
215	25	24	1	0.17	1.00	1.00	1.49	0.40	33
216	28	28	0	0.53	1.01	1.00	0.77	0.42	12

Tabla 7: (continuación)

Firma	n	n_1	n_0	CV	A	D	β_3	σ_{β_3}	n_b.
217	26	26	0	0.37	1.01	1.00	1.88	0.72	151
218	25	22	3	0.11	1.00	1.01	1.19	0.29	25
219	25	25	0	0.29	1.00	1.00	2.04	0.60	34
220	4	4	0	0.23	1.01	1.00	1.26	0.33	37
221	4	4	0	0.07	1.00	1.00	0.97	0.07	151
222	5	5	0	0.15	1.00	1.00	1.01	0.17	61
223	4	4	0	0.13	1.00	1.00	1.71	0.26	37
224	32	32	0	0.69	1.01	1.00	2.94	2.06	9
225	33	33	0	0.48	1.01	1.00	3.14	1.54	31
226	29	29	0	0.39	1.01	1.00	2.81	1.12	15
227	28	28	0	0.15	1.00	1.00	1.28	0.19	7
228	25	25	0	0.21	1.00	1.00	1.95	0.42	15
229	29	29	0	0.10	1.00	1.00	0.73	0.07	2
230	28	28	0	0.68	1.02	1.00	2.26	1.57	31
231	29	29	0	0.35	1.00	1.00	0.66	0.24	46
232	29	29	0	0.27	1.00	1.00	0.61	0.17	43
233	22	22	0	0.27	1.00	1.00	1.59	0.44	8
234	27	27	0	0.37	1.01	1.00	0.11	0.04	3
235	33	33	0	0.41	1.01	1.00	0.81	0.34	25
236	25	21	4	0.40	1.01	1.01	1.91	0.90	5
237	28	28	0	0.52	1.01	1.00	0.85	0.45	10
238	28	28	0	0.34	1.00	1.00	1.41	0.49	124
239	27	24	3	0.54	1.01	1.00	0.54	0.32	4
240	25	25	0	0.86	1.03	1.00	0.16	0.15	4
241	20	20	0	0.77	1.03	1.00	0.55	0.44	5
242	34	34	0	0.39	1.00	1.00	0.13	0.05	7
243	19	8	11	0.71	1.07	1.09	7.15	6.26	4
244	31	14	17	0.86	1.06	1.04	3.08	2.99	5
245	31	31	0	0.39	1.00	1.00	1.54	0.61	390
246	31	27	4	0.21	1.00	1.00	0.82	0.24	105
247	31	31	0	0.39	1.00	1.00	1.48	0.58	81
248	13	13	0	0.84	1.06	1.00	0.04	0.03	1121
249	31	31	0	0.29	1.00	1.00	1.09	0.33	41
250	31	31	0	0.35	1.00	1.00	1.20	0.43	30
251	24	24	0	0.81	1.03	1.00	1.25	1.04	4
252	31	31	0	0.24	1.00	1.00	2.11	0.52	63

Tabla 7: (continuación)

Firma	n	n_1	n_0	CV	A	D	β_3	σ_{β_3}	n_b.
253	31	30	1	1.00	1.04	1.00	0.63	0.67	9
254	4	4	0	0.10	1.00	1.00	1.46	0.16	40
255	25	25	0	0.83	1.03	1.00	0.20	0.17	4
256	25	25	0	0.45	1.01	1.00	0.44	0.20	25
257	31	31	0	0.50	1.01	1.00	1.02	0.52	122
258	31	31	0	0.93	1.03	1.00	6.79	6.47	80
259	31	31	0	0.12	1.00	1.00	0.98	0.12	419
260	23	15	8	0.65	1.03	1.03	4.75	3.52	25
261	31	31	0	0.51	1.01	1.00	0.87	0.45	36
262	5	5	0	0.11	1.00	1.00	1.10	0.14	255
263	27	26	1	0.91	1.03	1.00	0.10	0.10	11
264	27	27	0	0.72	1.02	1.00	1.26	0.93	4
265	25	10	15	0.33	1.01	1.07	7.02	3.30	28
266	31	23	8	1.05	1.05	1.01	0.51	0.58	2
267	26	26	0	0.24	1.00	1.00	1.21	0.30	57
268	25	25	0	0.65	1.02	1.00	0.51	0.34	5
269	29	21	8	0.43	1.01	1.01	2.41	1.21	5
270	28	27	1	0.39	1.01	1.00	0.47	0.21	1
271	32	32	0	0.79	1.02	1.00	0.59	0.48	4
272	32	32	0	0.30	1.00	1.00	3.57	1.08	25
273	31	10	21	0.48	1.02	1.08	2.39	1.44	2
274	31	14	17	0.49	1.02	1.04	6.48	3.78	10
275	4	4	0	0.24	1.02	1.00	1.00	0.27	89
276	5	5	0	0.15	1.00	1.00	1.30	0.21	11
277	27	26	1	0.60	1.01	1.00	3.26	2.12	16
278	24	24	0	0.31	1.00	1.00	0.86	0.28	26
279	31	31	0	0.07	1.00	1.00	1.09	0.08	31
280	28	24	4	0.64	1.02	1.01	2.95	2.06	14
281	31	6	25	0.32	1.02	1.18	2.58	1.31	1
282	25	25	0	0.27	1.00	1.00	0.61	0.17	24
283	28	28	0	1.26	1.06	1.00	0.86	1.13	148
284	29	29	0	0.34	1.00	1.00	1.45	0.50	5
285	30	11	19	1.01	1.11	1.07	0.75	0.87	-1
286	28	18	10	0.78	1.04	1.02	4.92	4.27	10
287	31	31	0	0.07	1.00	1.00	0.75	0.05	62
288	28	24	4	0.81	1.03	1.01	1.90	1.67	5

Tabla 7: (continuación)

Firma	n	n_1	n_0	CV	A	D	β_3	σ_{β_3}	n_b.
289	31	27	4	0.72	1.02	1.00	1.13	0.88	13
290	28	28	0	0.35	1.00	1.00	0.86	0.31	409
291	4	4	0	0.10	1.00	1.00	1.00	0.11	183
292	27	27	0	0.45	1.01	1.00	1.44	0.66	13
293	4	4	0	0.55	1.09	1.00	2.99	1.87	16
294	25	16	9	0.82	1.04	1.02	0.63	0.57	1
295	27	27	0	0.53	1.01	1.00	0.45	0.24	14
296	31	20	11	0.88	1.04	1.02	2.08	1.99	6
297	31	31	0	0.09	1.00	1.00	1.05	0.09	818
298	25	25	0	0.38	1.01	1.00	1.63	0.63	11
299	12	12	0	0.64	1.04	1.00	0.50	0.33	1
300	31	31	0	0.13	1.00	1.00	1.21	0.16	229
301	31	31	0	0.21	1.00	1.00	0.52	0.11	115
302	31	31	0	0.35	1.00	1.00	0.30	0.11	138
303	10	10	0	0.57	1.04	1.00	0.46	0.28	1
304	26	26	0	0.22	1.00	1.00	0.94	0.21	2019
305	25	23	2	0.78	1.03	1.00	3.54	3.02	4
306	28	27	1	0.71	1.02	1.00	0.18	0.14	1
307	31	31	0	0.26	1.00	1.00	0.79	0.21	2226
308	28	28	0	0.46	1.01	1.00	2.52	1.19	16
309	27	25	2	0.75	1.02	1.00	0.72	0.58	2
310	31	31	0	0.93	1.03	1.00	0.39	0.37	68
311	30	6	24	0.95	1.19	1.17	3.61	4.24	1
312	29	29	0	0.40	1.01	1.00	0.60	0.24	51
313	25	25	0	0.37	1.01	1.00	1.65	0.62	28
314	31	31	0	0.64	1.01	1.00	2.02	1.32	17
315	28	28	0	0.23	1.00	1.00	0.83	0.20	157
316	25	23	2	0.73	1.02	1.00	0.21	0.17	6
317	28	25	3	0.87	1.03	1.00	1.07	1.00	1
318	27	27	0	0.86	1.03	1.00	3.70	3.27	10
319	25	20	5	1.34	1.10	1.01	1.10	1.62	49
320	4	4	0	0.10	1.00	1.00	1.24	0.15	45
321	5	5	0	0.09	1.00	1.00	2.11	0.21	38
322	5	5	0	0.17	1.01	1.00	1.12	0.21	30
323	30	30	0	0.35	1.00	1.00	1.00	0.36	30
324	25	20	5	0.74	1.03	1.01	1.97	1.61	2

Tabla 7: (continuación)

Firma	n	n_1	n_0	CV	A	D	β_3	σ_{β_3}	n_b.
325	27	27	0	0.43	1.01	1.00	1.73	0.76	36
326	31	31	0	0.16	1.00	1.00	1.01	0.17	29
327	24	24	0	0.25	1.00	1.00	1.17	0.30	11
328	12	9	3	1.06	1.15	1.03	2.72	3.40	3
329	31	31	0	0.50	1.01	1.00	1.23	0.63	42
330	5	5	0	0.19	1.01	1.00	5.55	1.14	25
331	27	27	0	0.36	1.00	1.00	1.82	0.67	14
332	28	28	0	0.40	1.01	1.00	1.91	0.78	77
333	29	29	0	0.36	1.00	1.00	0.57	0.21	14
334	31	14	17	0.18	1.00	1.04	1.44	0.46	9
335	32	32	0	0.51	1.01	1.00	1.04	0.54	23
336	26	26	0	0.21	1.00	1.00	1.50	0.33	13
337	24	24	0	0.21	1.00	1.00	1.12	0.24	11
338	23	23	0	0.94	1.04	1.00	0.34	0.33	5
339	29	28	1	0.16	1.00	1.00	5.65	1.40	20